Chapitre 10

Ensembles

Plan du chapitre

1 Introduction . . . 1
1.1 Définitions, ensembles usuels . . . 1
1.2 Construction d'ensembles . . . 2
1.3 Ensembles produits . . . 4
1.4 Nombre d'éléments d'un ensemble . . . 5
1.5 Vocabulaire des intervalles de $\mathbb{R}$ . . . 5
2 Opérations sur les ensembles . . . 6
2.1 Inclusion et appartenance . . . 6
2.2 ✎✎✎ Montrer une inclusion ou une égalité d'ensembles . . . 6
2.3 Ensemble des parties de E . . . 8
2.4 Opérations sur les parties d'un ensemble . . . 9
2.5 Propriétés des opérations $\cap$, $\cup$ et passage au complémentaire . . . 10
2.6 Partition d'un ensemble . . . 11
2.7 Opérations avec une infinité d'ensembles . . . 12
3 Complément : ensemble et logique . . . 13
4 Méthodes pour les exercices. . . . 14

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, E, F et G sont des ensembles quelconques.

1 Introduction

1.1 Définitions, ensembles usuels

La notion d'ensemble est une notion fondamentale dans le formalisme moderne des mathématiques. On ne cherchera pas à en donner une définition précise, et on s'en tiendra à une définition "intuitive".

Définition 10.1

Un ensemble est un regroupement d'objets mathématiques (entiers, réels, fonctions, ...). Les objets contenus dans un ensemble sont appelés des élements de cet ensemble.

Notation. Si deux ensembles E et F ont exactement les mêmes éléments, on dira que E et F sont égaux et on écrira $E = F$. Sinon, on écrira $E \neq F$.

Document sous licence CC BY-NC-SA 4.0. Conditions de réutilisation sur https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.fr

Notation. Si x est un élément d'un ensemble E, on écrira $x \in E$. Sinon, on écrira $x \notin E$.

Exemple (Ensembles usuels)**.**

1. $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels, càd des entiers positifs.
2. $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs, càd de tous les entiers, quel que soit leur signe.
3. $\mathbb{D}$ est l'ensemble des nombres décimaux, càd des nombres qui peuvent s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule. Cet ensemble sera revu ultérieurement.
4. $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels, càd de tous les nombres qui s'écrivent sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$ et b non nul. Par exemple, $\frac{-1}{7} \in \mathbb{Q}$ mais $\pi \notin \mathbb{Q}$.
5. $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels, donc essentiellement tous les nombres entre $-\infty$ et $+\infty$ (exclus). La définition précise de $\mathbb{R}$ est hors-programme en CPGE.
6. $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes. On peut aussi mentionner $\mathbb{U}$ le cercle unité.
7. Les intervalles de $\mathbb{R}$.

1.2 Construction d'ensembles

En dehors des ensembles usuels, on utilise toujours des *accolades* pour désigner un ensemble. Il existe trois notations différentes et toutes sont utiles :

1) Par énumération

On peut écrire explicitement tous les éléments de l'ensemble, séparés par des virgules. On peut écrire des pointillés pour prolonger un motif.

Exemple.

$$A = \{1\} \qquad B = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \cdots, 100\right\}$$
$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\cdots\} \qquad \pi\mathbb{Z} = \{\cdots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \cdots\}$$

Remarque. Contrairement aux listes de Python, un ensemble ne tient pas compte des répétitions ni de l'ordre de ses éléments : ainsi $\{1,2\} = \{2,1\} = \{2,1,1\} = \{1,2,2,2,\cdots\}$

2) Avec une condition

Définition 10.2

Soit P un prédicat défini sur E. On note :

$$\left\{x \in E \;\middle|\; P(x)\right\}$$

comme étant

l'ensemble des (éléments) $x \in E$ tels que $P(x)$ (est vraie)

L'assertion $P(x)$ est donc une *condition* que doit vérifier x pour être dans l'ensemble.

Exemple.

$$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} \qquad \text{idem pour } \mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*$$
$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\} \qquad \text{de même pour } \mathbb{R}_-$$
$$\mathbb{U} = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| = 1\right\}$$

Exemple. Pour tous $a,b\in\mathbb{R}$: $\begin{cases}[a,b]=\ldots\ldots\ldots\ldots\\ ]a,b[=\ldots\ldots\ldots\ldots\\ [a,+\infty[=\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$

3) Avec un paramètre

On a vu (au chapitre de Fonctions usuelles) la notation de l'ensemble $f(I)$ avec f une fonction définie sur un intervalle I. La définition qui suit généralise cela lorsque I est remplacé par un ensemble E quelconque.

Définition 10.3

Soit f une fonction définie sur E. On note :

$$f(E)=\{f(x)\mid x\in E\}$$

comme étant

l'ensemble des (valeurs de) $f(x)$ lorsque x parcourt E

Exemple. a) $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left\{\sin x\,\middle|\, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right\}=[-1,1]$

b) $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)=\left\{\tan x\,\middle|\, x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right\}=\mathbb{R}$

Exemple. Parfois, la fonction f n'a pas besoin d'être définie et est sous-entendue :

a) $2\mathbb{N}=\{2n\mid n\in\mathbb{N}\}$ est l'ensemble des entiers naturels pairs.

b) $2\mathbb{N}+1=\{2n+1\mid n\in\mathbb{N}\}$ est l'ensemble des entiers naturels impairs.

c) $\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Remarque. Le choix du paramétrage (i.e. de la fonction f et de l'ensemble E) n'est pas unique. Dans les exemples ci-dessus, on n'a donné qu'un paramétrage, celui le plus naturel. Mais parfois, plusieurs paramétrages sont envisageables et selon la situation, on peut en choisir un plutôt qu'un autre :

Exemple. On a

$$\mathbb{U}=\left\{e^{i\theta}\mid\theta\in\mathbb{R}\right\}=\left\{e^{i\theta}\mid\theta\in[0,2\pi[\right\}$$

- Pour montrer que $z\in\mathbb{U}$, il suffit de montrer que $z=e^{i\theta}$ avec $\theta\in\mathbb{R}$ (ou encore que $|z|=1$).
- Mais une fois que $z\in\mathbb{U}$ est acquis, on peut affirmer que z peut s'écrire $e^{i\theta'}$ avec $\theta'\in[0,2\pi[$.

Exemple. On a

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\,\middle|\, a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{Z}^*\right\}=\left\{\frac{a}{b}\,\middle|\, a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}^*,\text{"}a\text{ et }b\text{ sont premiers entre eux"}\right\}$$

- Pour montrer que $x\in\mathbb{Q}$, il suffit de montrer que $x=\frac{a}{b}$ avec a et b deux entiers et b non nul.
- Mais une fois que $x\in\mathbb{Q}$ est acquis, on peut affirmer que x peut s'écrire $\frac{a}{b}$ avec $a\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{N}^*$ et la condition que a et b sont premiers entre eux.

⚠ Ne pas confondre les écritures $\{x \in E \mid P(x)\}$ et $\{f(x) \mid x \in E\}$! En effet, $P(x)$ est une *assertion* : on peut lui associer la valeur vraie ou fausse. Par contre $f(x)$ est une *expression*, elle n'a aucune valeur logique en soi. Enfin, dans les deux écritures, x est une variable *muette* (cf Chapitre 0).

1.3 Ensembles produits

Définition 10.4

À tout élément x de E et tout élément y de F, on peut associer un couple (x,y). Les éléments x et y sont appelés les composantes du couple (x,y). On note $E \times F$ l'ensemble des couples (x,y) possibles :

$$E \times F = \{(x,y) \mid x \in E, y \in F\}$$

On dit que $E \times F$ est le produit cartésien des ensembles E et F.

Le produit cartésien $E \times E$ est noté E^2.

Exemple. On pose $E = \{1,2\}$ et $F = \{3,4,5\}$. Alors

$$E \times F = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Exemple.
- $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples (a,b) avec $a,b \in \mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est l'ensemble des couples (r,θ) avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
- Les deux exemples ci-dessus permettent d'écrire de manière paramétrée les ensembles $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}^*$:

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$\mathbb{C}^* = \{re^{i\theta} \mid (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}\} = \{re^{i\theta} \mid (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,2\pi[\}$$

Définition 10.5

Étant donné deux couples (x,y) et (x',y') de $E \times F$, on définit une relation d'égalité entre couples par :

$$(x,y) = (x',y') \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

Enfin, on généralise le produit cartésien à n ensembles $E_1, \cdots, E_n$, avec $n \geqslant 2$ un entier :
- À tout élément x_1 de E_1, x_2 de E_2, etc. jusqu'à $x_n \in E_n$: on associe le n-uplet $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.
- On notera $E_1 \times \ldots \times E_n$ l'ensemble de tous ces n-uplets, et on dira que c'est le produit cartésien des n ensembles $E_1, \cdots, E_n$. Le produit $\underbrace{E \times \ldots \times E}_{n \text{ fois}}$ est noté E^n.
- Deux n-uplets $(x_1, \cdots, x_n)$ et $(x'_1, \cdots, x'_n)$ sont égaux si et seulement si toutes leurs composantes sont égales deux à deux : $x_1 = x'_1, \cdots, x_n = x'_n$.

⚠ Attention, les couples et les n-uplets tiennent compte de l'ordre : $(1,2) \neq (2,1)$. De plus, on ne doit pas confondre l'ensemble $\{1,2\}$ avec l'ensemble $\{(1,2)\}$, qui est un singleton qui contient le couple $(1,2)$. On a $\{1,2\} \subset \mathbb{R}$ mais $\{(1,2)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

1.4 Nombre d'éléments d'un ensemble

Définition 10.6

Un ensemble est dit un singleton s'il ne contient qu'un seul élément.
Un ensemble est dit fini s'il possède un nombre fini d'éléments. Sinon, il est dit infini.

Exemple.

- $\{0\}$, $\{6\}$ sont des singletons, mais $\{1,2\}$ n'est pas un singleton.
- Si $a=b$, alors $[a,b]=\{a\}$: c'est un singleton.
- Tout singleton est un ensemble fini, mais la réciproque est fausse.
- Si $a<b$, alors $[a,b]$ est un ensemble infini.

Enfin, il existe un ensemble très particulier dont la définition découle peu ou prou d'un axiome :

Définition 10.7 – **Ensemble vide**

On admet l'existence et l'unicité d'un ensemble qui ne contient aucun élément. C'est l'ensemble vide. On le note : $\varnothing$

Plus généralement, on dit qu'un ensemble est vide s'il ne contient aucun élément (c'est donc l'ensemble vide).

Exemple. L'ensemble $[a,b]$ est vide si $a>b$. L'ensemble $]a,b[$ est vide si $a\geqslant b$.

1.5 Vocabulaire des intervalles de $\mathbb{R}$

On définit un intervalle par ses bornes et on précise si les bornes sont incluses ou non dans l'intervalle par des crochets ouverts (borne exclue) ou fermés (borne incluse).

- Un intervalle est dit ouvert si les deux bornes sont exclues.
- Un intervalle est dit fermé si les deux bornes sont incluses.
- Un intervalle peut être ni ouvert ni fermé, par exemple $[0,1[$.
- Un intervalle est dit borné si ses deux bornes sont finies.
- Un intervalle est dit non borné si au moins une des deux bornes est infinie.
- Un intervalle est dit trivial s'il est vide ou si c'est un singleton. Dans le cas contraire, l'intervalle est dit non trivial.
- On appelle segment tout intervalle fermé borné (éventuellement trivial). Il s'écrit donc $[a,b]$ avec $a,b\in\mathbb{R}$.

Définition 10.8 – **"Intervalles d'entiers"**

Soit $a,b\in\mathbb{Z}$ avec $a\leqslant b$. On note :

$$[\![a,b]\!]=\{a,a+1,a+2,\cdots,b-1,b\}$$

Exemple. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $[\![0,n]\!]=\{0,1,2,\cdots,n\}$ et $[\![-n,n]\!]=\{-n,-n+1,\cdots,n-1,n\}$.

2 Opérations sur les ensembles

2.1 Inclusion et appartenance

Définition 10.9

On dit que l'ensemble E est inclus dans F, et on note $E \subset F$, si tout élément de E est un élément de F.
On dit également que E est un sous-ensemble de F ou encore une partie de F.

Si E n'est pas inclus dans F, on note $E \not\subset F$.

Exemple.
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (i.e. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$).
- On a toujours $E \subset E$ et $\varnothing \subset E$ (ceci sera justifié en partie 3).



Ne pas confondre **l'élément** x qui **appartient** ($\in$) à E avec **l'ensemble** $\{x\}$ qui est **inclus** ($\subset$) dans E. On écrira donc :

$$0 \in \mathbb{N} \qquad \{0\} \subset \mathbb{N} \qquad \text{mais JAMAIS :} \qquad \underbrace{\cancel{0 \subset \mathbb{N}} \quad \cancel{\{0\} \in \mathbb{N}}}_{\text{faux !}}$$

Exemple. Compléter les pointillés par $\in$ ou $\subset$ si un de ces symboles convient, ou par $\notin$ ou $\not\subset$ dans le cas contraire.

$$[\![0,5]\!] \ldots\ldots [0,5] \qquad \sqrt[3]{27} \ldots\ldots \mathbb{N}$$
$$\sqrt{18} \ldots\ldots \{3\sqrt{2}\} \qquad \{\sqrt{x} \mid x \in \mathbb{R}_+\} \ldots\ldots \mathbb{Z}$$
$$\{\sqrt{2}\} \ldots\ldots \mathbb{Q} \qquad \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 = 0\} \ldots\ldots \{0\}$$

Théorème 10.10

$$(E \subset F \text{ et } F \subset G) \implies E \subset G$$

Remarque. Un ensemble défini par une condition (avec un prédicat P) vérifie toujours l'inclusion suivante :

$$\{x \in E \mid P(x)\} \quad \subset \quad E$$

Un ensemble défini par un paramètre, avec une fonction $f : E \to \boldsymbol{F}$, vérifie toujours l'inclusion suivante :

$$\{f(x) \mid x \in E\} \quad \subset \quad \boldsymbol{F}$$

2.2 ✎✎✎ Montrer une inclusion ou une égalité d'ensembles

Pour raisonner sur des ensembles, il est **essentiel** de reformuler les assertions "$x \in E$", "$E \subset F$" et "$E = F$" grâce aux caractérisations ci-dessous.

Théorème 10.11 – **Caractérisations d'appartenance**

Soit P un prédicat défini sur E. Pour tout $x' \in E$:

$$x' \in \{x \in E \mid P(x)\} \iff P(x') \quad \text{(est vrai)}$$

Soit $f : E \to F$ une fonction. Pour tout $y \in F$:

$$y \in \{f(x) \mid x \in E\} \iff \exists x \in E \quad y = f(x)$$

Théorème 10.12 – **Caractérisations de l'inclusion et de l'égalité**

Remarque. Si A et B sont deux sous-ensembles d'un même ensemble E, on dispose d'une autre caractérisation, moins utile en pratique :

$$A = B \iff \forall x \in E \quad (x \in A \iff x \in B)$$

Pour montrer que deux ensembles E et F sont égaux, le plus classique est donc de montrer successivement que $E \subset F$ puis que $F \subset E$. On dit qu'on raisonne par double inclusion.

10.13 ★★☆ On pose $E = \left\{ \dfrac{1+ix}{1-ix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$. Montrer que $E = \mathbb{U} \setminus \{-1\}$.

Solution.

2.3 Ensemble des parties de E

Un ensemble peut contenir n'importe quel objet mathématique, y compris... d'autres ensembles ! On peut par exemple poser $E = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$: c'est un ensemble qui contient deux éléments, à savoir $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$. Bien que $\mathbb{N}$ soit lui-même un ensemble, c'est aussi un élément de l'ensemble E. On peut donc écrire $\mathbb{N} \in E$.

Exemple. L'ensemble $\{1,2\}$ contient deux éléments, mais l'ensemble $\Big\{ \{1,2\} \Big\}$ est un singleton (il contient pour seul élément l'ensemble $\{1,2\}$).

Définition 10.14

On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E, ou encore l'ensemble de tous les sous-ensembles de E.

Théorème 10.15 – **Caractérisation de l'appartenance à $\mathscr{P}(E)$**

Pour tout ensemble A, on a :

Remarque. On a toujours $E \in \mathscr{P}(E)$ et $\varnothing \in \mathscr{P}(E)$.

Exemple.

- Si $E = \{1\}$, alors E ne possède que deux parties : ..... et ....., donc :

$$\mathscr{P}(E) = \mathscr{P}(\{1\}) = \Big\{ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Big\}$$

- Si $E = \{1,2\}$, on a :

$$\mathscr{P}(\{1,2\}) = \Big\{ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Big\}$$

- On a : $\mathscr{P}(\varnothing) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2.4 Opérations sur les parties d'un ensemble

Définition 10.16

Soit $A, B \in \mathscr{P}(E)$. On construit d'autres parties de E avec les opérations suivantes :

- L'intersection de A et B est l'ensemble noté $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$
- La (ré)union de A et B est l'ensemble noté $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- La différence de A et B est l'ensemble noté $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$
- Le complémentaire de A et B est l'ensemble $E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\}$

Le complémentaire est parfois noté A^c ou $\overline{A}$.

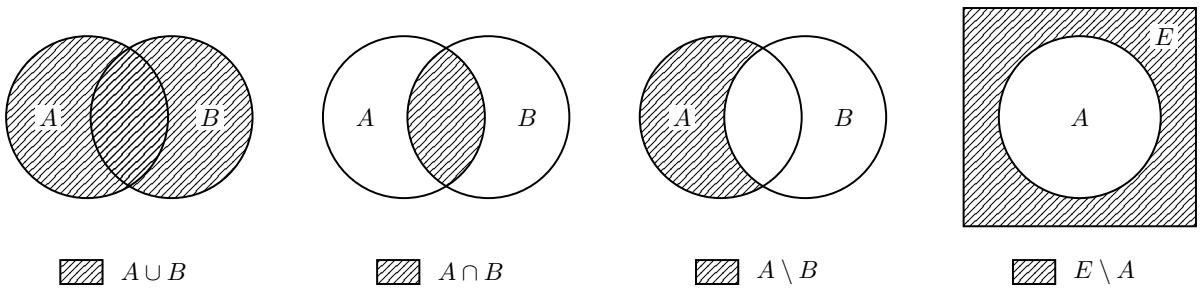


FIGURE 10.1 – Représentation des ensembles $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ et $E \setminus A$

Théorème 10.17 – Caractérisations de l'appartenance ($\cap$, $\cup$ et $\setminus$)

Soit A et B deux parties de E et $x \in E$.

$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B \qquad x \in A \setminus B \iff x \in A \text{ et } x \notin B$$
$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B \qquad x \in \overline{A} \iff x \notin A$$

Exemple. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres irrationnels : ce sont les réels qui ne peuvent pas s'écrire comme une fraction d'entiers. Par exemple, π et $\sqrt{2}$ sont irrationnels.

Exemple. Déterminer les ensembles suivants :

- $[-5,5] \cap]0,+\infty[= \ldots\ldots\ldots$
- $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \ldots\ldots\ldots$
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+ = \ldots\ldots\ldots$
- $\overline{[0,1]} = \ldots\ldots\ldots$ (on prend le complémentaire en tant que partie de $\mathbb{R}$)

2.5 Propriétés des opérations $\cap$, $\cup$ et passage au complémentaire

Théorème 10.18 – Identités liées à $\cap$, $\cup$ et au complémentaire

Soit A, B et C des parties de l'ensemble E.

- $A \cap B = B \cap A$ (commutativité de $\cap$)
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associativité de $\cap$: on peut donc écrire $A \cap B \cap C$ sans ambiguïté)

- $A \cup B = B \cup A$ (commutativité de $\cup$)
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (associativité de $\cup$: on peut donc écrire $A \cup B \cup C$ sans ambiguïté)

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributivité de $\cap$ sur $\cup$)
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivité de $\cup$ sur $\cap$)

- $\overline{\overline{A}} = A$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (une des deux lois de Morgan)
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (une des deux lois de Morgan)

Démonstration. Soit $x \in E$. On reformule les énoncés grâce aux caractérisations du Théorème 10.17, et aussi la caractérisation "$x \notin A \iff \text{non}(x \in A)$". Le reste découle des propriété du chapitre de Logique. Par exemple :

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cap B} &\iff \text{non}\,(x \in A \cap B) \\ &\iff \text{non}\,(x \in A \text{ et } x \in B) \\ &\iff \text{non}(x \in A) \text{ ou } \text{non}(x \in B) \\ &\iff x \in \overline{A} \text{ ou } x \in \overline{B} \\ &\iff x \in \overline{A} \cup \overline{B} \end{aligned}$$

Ainsi, $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$ ont les mêmes éléments : ces ensembles sont égaux. □

Enfin, il y a un certain nombre de propriétés “évidentes” qu'il n'est pas nécessaire de redémontrer en DS. En voici quelques-unes :

$$A\cap\varnothing=\varnothing \qquad A\cup\varnothing=A \qquad A\cap A=A\cup A=A$$
$$A\cup B=\varnothing \iff A=B=\varnothing \qquad A\cap B=E \iff A=B=E$$

Théorème 10.19 – Caractérisations de l'inclusion via $\cup$, $\cap$ et le complémentaire

Soit A et B deux parties de l'ensemble E.

- $A\subset B \iff A\cap B=$ .....
- $A\subset B \iff A\cup B=$ .....
- $A\subset B \iff \overline{B}\subset\overline{A}$

2.6 Partition d'un ensemble

Définition 10.20

Deux ensembles A et B sont dits disjoints si $A\cap B=\varnothing$.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Des ensembles $A_1,A_2,\cdots,A_n$ sont dits disjoints deux à deux si quand on prend deux de ces ensembles, ils sont disjoints :

$$\forall i,j\in[\![1,n]\!] \qquad i\neq j \implies A_i\cap A_j=\varnothing.$$

Définition 10.21

Une partition d'un ensemble E est une famille de sous-ensembles $A_1,A_2,\cdots,A_n$ de E (avec $n\in\mathbb{N}^*$) qui vérifient :

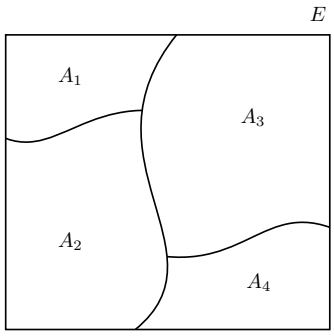


FIGURE 10.2 – Une partition de E en 4 sous-ensembles A_1, A_2, A_3 et A_4

Autrement dit, les sous-ensembles $A_1, \cdots, A_n$ doivent être tous non vides, deux à deux disjoints et leur réunion donne E tout entier.

Exemple. $2\mathbb{N}$ et $2\mathbb{N}+1$ forment une partition de $\mathbb{N}$. $\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_-^*$ et $\{0\}$ forment une partition de $\mathbb{R}$.

Remarque (Raisonnement par disjonction de cas)**.** Si $A_1, \cdots, A_n$ forment une partition d'un ensemble E, alors

$$\forall x \in E \quad P(x) \quad \iff \quad \begin{cases} \forall x \in A_1 & P(x) \\ \cdots & \\ \forall x \in A_n & P(x) \end{cases} \quad \iff \quad \forall i \in [\![1,n]\!] \quad \forall x \in A_i \quad P(x)$$

2.7 Opérations avec une infinité d'ensembles

On peut définir l'union et l'intersection avec un nombre infini de sous-ensembles. Pour simplifier la présentation (et parce que c'est ce qui sert le plus en pratique), on considère le cas où on dispose d'une suite de sous-ensembles.

Définition 10.22

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de sous-ensembles de E. On définit

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap \ldots = \left\{x \in E \;\middle|\; \forall k \in \mathbb{N}^* \quad x \in A_k\right\}$$

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \ldots = \left\{x \in E \;\middle|\; \exists k \in \mathbb{N}^* \quad x \in A_k\right\}$$

Remarque. Dans les égalités ci-dessus, les variables n, x, k sont toutes muettes.

Exemple. $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} [n, n+1[= \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty}]n, n+1[= \ldots\ldots\ldots\ldots$

Théorème 10.23 – **Caractérisations d'appartenance ($\bigcup$ et $\bigcap$)**

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de sous-ensembles de E et soit $x \in E$.

$$x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \quad \iff \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad x \in A_n$$

$$x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \quad \iff \quad \exists n \in \mathbb{N}^* \quad x \in A_n$$

Exemple. Simplifier l'ensemble $A = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$.

3 Complément : ensemble et logique

Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'un élément x d'un ensemble quelconque. Par convention :

- "$\forall x \in \varnothing \quad P(x)$" est toujours *vrai*.
- "$\exists x \in \varnothing \quad P(x)$" est toujours *faux*.

Rappel : pour tout ensemble E,

$$\varnothing \subset E \quad \Longleftrightarrow \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ainsi, grâce à la convention ci-dessus, on a bien $\varnothing \subset E$. Cette convention entraine aussi le fait que "Faux $\Longrightarrow$ ..." est vrai. En effet, pour deux propositions P et Q dépendant d'une variable x dans E :

$$(\forall x \in E \quad P(x) \Longrightarrow Q(x)) \quad \Longleftrightarrow \quad \{x \in E \mid P(x)\} \subset \{x \in E \mid Q(x)\}$$

À présent, si $P(x)$ est fausse pour tout x de E, l'inclusion de droite se réécrit "$\varnothing \subset \ldots$", ce qui est toujours vrai.

4 Méthodes pour les exercices

Méthode

Pour montrer que $E \subset F$, on montre "$\forall x \in E \quad x \in F$".

Méthode

Pour montrer que $E = F$, on peut :

- **Raisonner par double inclusion.**
- En notant G un ensemble qui contient E et F, montrer que

$$\forall x \in G \qquad x \in E \iff x \in F$$

Méthode

Pour exploiter ou démontrer qu'un élément appartient à un ensemble, on utilise les caractérisations suivantes (à connaitre) :

- $x \in \left\{x' \in E \;\middle|\; P(x')\right\} \iff \ldots$
- $y \in \left\{f(x) \;\middle|\; x \in E\right\} \iff \ldots$
- $x \in A \cup B \iff \ldots$
- $x \in A \cap B \iff \ldots$
- $x \in A \setminus B \iff \ldots$
- $A \in \mathscr{P}(E) \iff \ldots$